

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Казакбаев В.М.

УрФУ, e-mail: kem\_em@mail.ustu.ru

Надежность электрооборудования в значительной мере определяется надежностью ее изоляции. Асинхронные электродвигатели, работающие в электроприводах с преобразователями частоты на современной IGBT-базе, испытывают повышенные электрические нагрузки (по напряжению и току), снижающие их рабочую мощность и срок службы. Проблема добавочных потерь частично решается использованием сглаживающих дросселей и повышением несущей частоты напряжения в преобразователе [4]. Увеличение этой частоты, однако, ведет к увеличению перенапряжений на отдельных элементах изоляции машины [5]. Для расчета этих перенапряжений необходимо решение цепей с распределенными параметрами (ЦРП) [2]. В данной статье рассматривается применение метода конечных разностей (МКР) к расчету наиболее простой ЦРП, распределенные элементы которой математически заданы телеграфными уравнениями (ТУ). Представленным методом могут быть решены не только телеграфные уравнения, но и любые другие цепи с распределенными параметрами (ЦРП).

ТУ являются математической моделью, описывающей распространение волн потенциала и тока вдоль относительно низкочастотных систем передачи электрической энергии, таких как воздушные линии, а также многопроводные и коаксиальные кабели:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 \cdot i(x, t) \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 \cdot u(x, t) + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

Традиционно цепи, имеющие участки с распределенными параметрами, решаются методом распространяющихся волн (Даламбера), который позволяет получать решения для линии без потерь ( $R_0 = 0$ ,  $G_0 = 0$ ). Также это решение можно распространить на неискажающую (недисперсирующую) линию ( $R_0/L_0 = G_0/C_0$ ) [1].

Однако, не всякую воздушную или кабельную линию допустимо считать неискажающей во всем рабочем диапазоне частот. Дисперсия волн может оказывать значительное влияние и на значение максимальных напряжений на зажимах двигателя в системах АД-ПЧ.

Имеется также достаточно большое количество аналитических методов решения начально-граничных задач с уравнениями ЦРП, позволяющих получать точные решения для линий с потерями (например, метод разделения переменных или операторный метод [2]). Однако все обладают достаточно большой трудоемкостью и позволяют получить результат лишь в виде бесконечных счетных множеств: рядов Фурье, что не всегда удобно. К тому же метод Фурье не позволяет рассматривать системы, включающие два и более элемента с распределенными параметрами, а при использовании операторного метода не всегда удастся провести все расчетные процедуры аналитически. Часто обратное интегральное преобразование приходится выполнять численно.

Общепризнанным подходом к практическому решению ЦРП является замена линий с распределенными параметрами на цепные схемы (ЦС) с сосредоточенными параметрами [2]. Такая ЦС позволяет рассчитывать токи и напряжения интересующих систем в узлах сопряжения своих звеньев с достаточно хорошей точностью. Недостатком подхода является относительно невысокая точность определения тока и напряжения вдоль моделируемой линии в конкретные моменты времени, а также необходимость расчета достаточно громоздких электрических цепей, что, в конечном счете, требует использования операторного метода или специальных программ, способных моделировать процессы в схемах со сложной топологией. Также при использовании ЦС возникают определенные трудности с заданием на границах линий, не отражающих граничных условий [3].

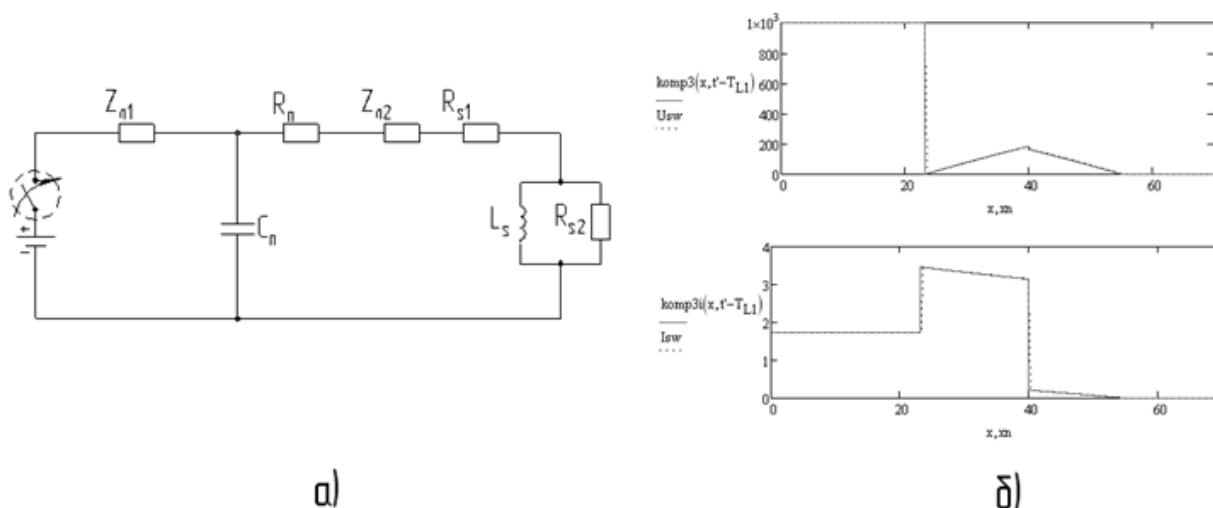
Альтернативой может быть применение численных методов непосредственно к исходной начально-краевой задаче. Задачи с уравнениями в частных производных (полевые, волновые) в настоящее время решаются либо с помощью метода конечных элементов (МКЭ), либо с помощью метода конечных разностей (МКР). МКЭ достаточно сложен в реализации и в использовании, в то время как решения ЦРП вполне можно получать, используя МКР.

Не всякая разностная схема, аппроксимирующая ТУ, будет устойчива. Так, при аппроксимации системы в виде канонических волновых уравнений неизменно получается неустойчивая схема. Наиболее известной и применяемой является схема, называемая в англоязычной литературе «finite difference time domain» (FDTD) – «конечные разности во временной области» (КРВО) [3]. Уравнения (1), после применения к ним разностной схемы FDTD и замены полукруглых индексов массивов сеточных функций решения на целые, принимают вид:

$$\begin{cases} I_i^{n+1} = \frac{\frac{-\Delta t}{L_0 \Delta z} (U_{j+1}^m - U_j^m) + \frac{-I_i^n R_0 \Delta t}{2 L_0} + I_i^n}{1 + \frac{R_0 \Delta t}{2 L_0}} \\ U_j^{m+1} = \frac{\frac{-\Delta t}{C_0 \Delta z} (I_i^{n+1} - I_{i-1}^{n+1}) + \frac{-U_j^m G_0 \Delta t}{2 L_0} + U_j^m}{1 + \frac{G_0 \Delta t}{2 C_0}} \end{cases} \quad (2)$$

где  $\Delta x$  – шаг сетки по пространственной переменной,  $\Delta t$  – шаг сетки по временной переменной,  $i$  и  $n$  – индексы двумерного массива функции  $I$ ,  $j$  и  $m$  – соответствующие индексы двумерного массива функции  $U$ ;  $\Delta z = l/k$ ,  $\Delta t = t_{\max}/h$ ;  $i = 1 \dots k$ ,  $n = 1 \dots h$ ,  $j = 1 \dots (k+1)$ ,  $m = 1 \dots h$ . Здесь  $l$  – длина линии,  $t_{\max}$  – время расчета,  $k$  – количество узлов сетки по оси  $x$  для  $I$ ,  $(k+1)$  – количество узлов сетки по оси  $x$  для  $U$ ,  $h$  – количество узлов сетки по оси  $t$  для  $I$  и  $U$ .

Сравним также результаты решения методом конечных разностей и аналитическим волновым методом цепи, показанной на рисунке (а). Пусть источник обладает напряжением  $U_n = 1000$  В. Параметры сосредоточенных элементов:  $R_n = 100$  Ом,  $C_n = 10^{-6}$  Ф,  $R_{s1} = 2$  Ом,  $R_{s2} = 1$  Ом,  $L_s = 10^{-5}$  Гн. Параметры линии  $Z_{л1}$ :  $L_{01} = 0,002$  Гн/м,  $C_{01} = 6 \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $lh_1 = 40$  м (длина). Параметры линии  $Z_{л2}$ :  $L_{02} = 0,003$  Гн/м,  $C_{02} = 5 \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $lh_2 = 30$  м.



Рассчитываемая ЦРП (а) и результаты расчета (б)

На рисунке (б) показано распределение напряжения (вверху) и тока (внизу) по длине линий в момент времени  $t = T_{L1} + 0.5 \cdot T_{L2}$ , когда электромагнитная волна, движущаяся от источника к нагрузке, прошла через коммутационный узел и частично отразилась от него, где  $T_{L1}$  - время пробега волны по первой линии;  $T_{L2}$  - время пробега волны по второй линии.

По результатам ряда расчетов с использованием МКР можно сделать следующий вывод, что данный метод является подходящим средством для анализа переходных процессов в цепях с распределенными параметрами с произвольными начальными условиями, охватывая широкий диапазон граничных условий.

#### Библиографический список

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: ГАРДАРИКИ, 2008.
2. Каганов З. Г. Электрические цепи с распределенными параметрами и цепные схемы. М.: Энергоатомиздат, 1990.
3. Hung Loui. 1D-FDTD using MATLAB // ECEN-6006. Numerical methods in photonics project-1. September 2004.
4. Вершинин А. В. Разработка специальных конструктивных исполнений частотно-регулируемых асинхронных электродвигателей / А. В. Вершинин, М. С. Драгомиров, А. М. Зайцев, О. В. Кругликов // Электротехника. 2008. № 11. С. 46-49.
5. Воронцов А. Г. Высокочастотные электромагнитные процессы в электрических машинах при широтно-импульсной модуляции напряжения / А. Г. Воронцов, Доан Ань Туан, Ю. П. Коськин, М. В. Пронин // Электротехника. 2008. № 3. С. 36-44.

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АГРЕГАТЫ НА БАЗЕ ПАРОВЫХ ТУРБИН МАЛОЙ МОЩНОСТИ

Камагорцева У.В.

ЗАО «Концерн «KLG», Санкт-Петербург, [ustina@klgcorp.ru](mailto:ustina@klgcorp.ru)

В настоящее время в России и в мире получают всё большее распространение новые технологии энергосбережения. Малая энергетика позволяет потребителю не зависеть от централизованного энергоснабжения, использовать оп-